CHAPITRE

I.1

LES NOMBRES PREMIERS

1.1. Introduction

L'addition et la multiplication confèrent à l'ensemble des entiers naturels $\{1,2,3,\ldots\}$ une double structure de semi-groupe abélien. La première, associée à une relation d'ordre total, est engendrée par le seul nombre 1. La seconde, image de l'ordre partiel de la divisibilité, possède une infinité de générateurs : les nombres premiers. Défini depuis l'Antiquité, ce concept-clef n'a pas encore, il s'en faut de beaucoup, livré tous ses secrets. La situation centrale de la théorie des nombres premiers en Arithmétique est amplement justifiée par le résultat suivant dont nous esquissons la démonstration, via le premier théorème d'Euclide, aux Exercices 10 à 13.

Théorème 1.1 (Théorème fondamental de l'arithmétique). *Chaque entier naturel > 1 se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous forme d'un produit de nombres premiers.*

Le second théorème d'Euclide énonce l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'arithmétique : si $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$ sont les n plus petits nombres premiers alors l'entier

$$N = 1 + \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j$$

n'est divisible par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Son plus petit facteur premier est donc un nombre premier $> p_n$.

On désigne habituellement par $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers n'excédant pas x de sorte que, pour tout entier n, on a $\pi(p_n) = n$. Le second théorème d'Euclide exprime le fait que

$$\pi(x) \to \infty \qquad (x \to \infty).$$

Depuis plus de vingt-trois siècles, les mathématiciens s'attachent à préciser quantitativement cette relation qualitative. C'est l'un des buts de cet ouvrage que de décrire les diverses méthodes qu'ils ont inventées et mises en œuvre pour y parvenir.

La preuve donnée plus haut du second théorème d'Euclide est trop simple pour être ineffective. On a en effet

$$p_{n+1} \leqslant 1 + \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} p_j$$

d'où l'on déduit par une récurrence immédiate

$$p_n \leqslant 2^{2^n} \qquad (n \geqslant 1).$$

On obtient ainsi la minoration suivante.

Théorème 1.2. *On a*

$$\pi(x) > \frac{\ln_2 x}{\ln 2} - \frac{1}{2} \qquad (x \geqslant 2).$$

Démonstration. D'après la majoration de p_n établie plus haut, on peut écrire

$$\pi(x) \geqslant \max\{m \in \mathbb{N} : 2^{2^m} \leqslant x\} = \left\lfloor \frac{\ln(\ln x/\ln 2)}{\ln 2} \right\rfloor \geqslant \frac{\ln_2 x}{\ln 2} - \left(1 + \frac{\ln_2 2}{\ln 2}\right),$$

ce qui implique le résultat annoncé. □

La minoration du Théorème 1.2 est loin d'être optimale. Après avoir été conjecturée pendant plus d'un siècle (notamment par Legendre et Gauss), la formule asymptotique

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to \infty),$$

a été établie indépendamment en 1896 par Hadamard (1865–1963) et La Vallée-Poussin (1866–1962). Leurs méthodes reposaient sur des techniques d'analyse complexe qui seront décrites au tome II. Il a fallu attendre 1949 pour qu'apparaissent les premières démonstrations élémentaires du théorème des nombres premiers, dues à Erdős et Selberg. Depuis cette date, de nombreuses autres démonstrations élémentaires ont été publiées. Celle de Daboussi (1984), est particulièrement élégante et repose sur un principe fondamentalement différent des autres.[1] Elle est notamment exposée en détail au chap. 4 de Tenenbaum & Mendès France (2000).

1.2. Les estimations de Tchébychev

C'est au mathématicien russe Tchébychev que l'on doit les premiers travaux conséquents sur la fonction $\pi(x)$. En 1852, il démontre le postulat de Bertrand selon lequel chaque intervalle $]n, 2n]$, $n \geqslant 1$, contient au moins un nombre

[1] Elle ne fait notamment pas appel à l'identité de Selberg — *cf.* Exercice 75, p. 77 — qui joue un rôle essentiel dans la plupart des autres preuves élémentaires.

premier. Il obtient ce résultat en établissant une forme effective de l'estimation

$$\{c_1 + o(1)\}\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant \{c_2 + o(1)\}\frac{x}{\ln x} \qquad (x \to \infty),$$

avec $c_1 = \ln(2^{1/2}\,3^{1/3}\,5^{1/5}\,30^{-1/30}) \approx 0{,}92129$, et $c_2 = \frac{6}{5}\,c_1 \approx 1{,}10555$.

Nous allons montrer par une méthode simple le résultat suivant qui implique une forme légèrement affaiblie du postulat de Bertrand : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que chaque intervalle $]n, (2+\varepsilon)n]$, $n \geqslant n_0$, contienne au moins un nombre premier.

Théorème 1.3. *Pour $n \geqslant 4$, on a*

$$(\ln 2)\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant \left\{\ln 4 + \frac{8\ln_2 n}{\ln n}\right\}\frac{n}{\ln n}.$$

Démonstration. La majoration est une conséquence facile du résultat classique suivant.

Théorème 1.4. *Pour $n \geqslant 1$, on a*

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

En effet, admettant pour l'instant ce résultat, on a pour tout t, $1 < t \leqslant n$,

$$t^{\pi(n)-\pi(t)} \leqslant \prod_{t<p\leqslant n} p \leqslant 4^n$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$\pi(n) \leqslant \frac{n\ln 4}{\ln t} + t.$$

Le résultat annoncé s'obtient en choisissant $t = n/(\ln n)^2$ — les détails numériques étant laissés au lecteur. □

Preuve du Théorème 1.4. On procède par récurrence sur l'entier n, que l'on peut manifestement supposer $\geqslant 3$. Si n est pair, n n'est pas premier donc

$$\prod_{p\leqslant n} p = \prod_{p\leqslant n-1} p \leqslant 4^{n-1} < 4^n.$$

Si n est impair, posons $n = 2m+1$. L'argument se fonde sur l'intégralité des coefficients binomiaux d'ordre n. On a $\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!/m!(m+1)!$ donc

$$\left(\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\right) \Bigg| \binom{2m+1}{m} \leqslant \tfrac{1}{2}2^{2m+1} = 4^m,$$

où la dernière inégalité provient du fait que le coefficient $\binom{2m+1}{m}$ est égal à $\binom{2m+1}{m+1}$ et apparaît donc 2 fois dans le développement binomial de $(1+1)^{2m+1}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $m+1 < n$, on obtient donc

$$\prod_{p\leqslant n} p = \prod_{p\leqslant m+1} p \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^{m+1}\,4^m = 4^n,$$

ce qui achève la démonstration. □

La minoration du Théorème 1.3 sera obtenue par une méthode remarquablement simple et efficace, due à Nair (1982a, b). Elle est fondée sur l'inégalité

$$\pi(n) \geqslant (\ln d_n)/\ln n \qquad (n \geqslant 2),$$

où d_n désigne le plus petit multiple commun aux nombres $1,2,\ldots,n$. En effet, si $p^\nu \| d_n$, alors il existe un $m \leqslant n$ tel que $p^\nu | m$, d'où $p^\nu \leqslant n$ et

$$d_n = \prod_{p \leqslant n,\, p^\nu \| d_n} p^\nu \leqslant \prod_{p \leqslant n} n = n^{\pi(n)},$$

ce qui équivaut à l'inégalité annoncée. Le résultat souhaité découle alors du théorème suivant.

Théorème 1.5 (Nair). *Pour $n \geqslant 7$, on a $d_n \geqslant 2^n$.*

Démonstration. L'idée essentielle introduite par Nair consiste à considérer l'intégrale

$$I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx \qquad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

D'une part, le développement binomial de $(1-x)^{n-m}$ montre que $I(m,n)$ est un nombre rationnel de dénominateur divisant d_n : on a

$$I(m,n) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \frac{1}{m+j} \in \frac{1}{d_n}\mathbb{Z}.$$

D'autre part $I(m,n)$ est « petit ». On peut même calculer facilement sa valeur en remarquant que l'on a pour tout y, $0 \leqslant y \leqslant 1$,

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m,n) = \int_0^1 (1-x+xy)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} y^{m-1},$$

d'où

$$I(m,n) = 1\Big/ n\binom{n-1}{m-1} = 1\Big/ m\binom{n}{m}, \qquad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

Cela montre que $m\binom{n}{m} \mid d_n$ pour $1 \leqslant m \leqslant n$, d'où

$$n\binom{2n}{n} \mid d_{2n} \mid d_{2n+1}, \qquad \text{et} \qquad (n+1)\binom{2n+1}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n} \mid d_{2n+1}.$$

Comme n et $2n+1$ sont premiers entre eux, il vient

$$n(2n+1)\binom{2n}{n} \mid d_{2n+1},$$

et finalement, puisque $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $(2n+1)$ coefficients binomiaux apparaissant dans le développement de $(1+1)^{2n}$,

$$d_{2n+1} \geqslant n\,4^n \qquad (n \geqslant 1).$$

On en déduit $d_{2n+1} \geqslant 2{\cdot}4^n = 2^{2n+1}$ $(n \geqslant 2)$, et $d_{2n+2} \geqslant d_{2n+1} \geqslant 4^{n+1}$ $(n \geqslant 4)$, ce qui établit l'inégalité annoncée $d_n \geqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 9$. On vérifie sans peine qu'elle est encore satisfaite pour $n = 7$ et $n = 8$: $d_7 = 420$, $d_8 = 840$. □

1.3. Valuation *p*-adique de *n*!

Pour chaque nombre premier p, on désigne par valuation p-adique, et l'on note v_p, la fonction arithmétique qui associe à chaque entier n l'exposant de p dans sa décomposition canonique. Le théorème simple ci-dessous nous sera utile dans la suite.

Théorème 1.6. *Pour chaque nombre premier p, on a*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \lfloor n/p^k \rfloor \qquad (n \geqslant 1).$$

Remarque. La somme en k est en réalité finie puisque le terme général est nul dès que $k > (\ln n)/\ln p$.

Démonstration. On a

$$v_p(n!) = \sum_{m \leqslant n} v_p(m) = \sum_{m \leqslant n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant v_p(m)} 1 = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \leqslant n,\, v_p(m) \geqslant k} 1.$$

La somme intérieure est égale au nombre d'entiers $m \leqslant n$ qui sont divisibles par p^k. Elle vaut donc $\lfloor n/p^k \rfloor$, ce qui fournit bien l'expression souhaitée. □

Corollaire 1.7. *Pour tout nombre premier p, on a*

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \qquad (n \geqslant 1).$$

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.6 et de l'encadrement $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, valable pour tout nombre réel x.

1.4. Le premier théorème de Mertens

Certaines quantités liées aux nombres premiers n'excédant pas x ont un comportement asymptotique plus facilement accessible que la fonction $\pi(x)$. C'est notamment le cas de l'expression évaluée dans le théorème suivant.

Théorème 1.8 (Premier théorème de Mertens). *Pour $x \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

De plus, le terme $O(1)$ figurant dans cette formule varie dans l'intervalle ouvert $]-1-\ln 4,\ \ln 4[$.

NB. $\ln 4 \approx 1{,}38629$.

Démonstration. Nous allons évaluer de deux manières différentes la quantité $\ln(n!)$ pour $n = \lfloor x \rfloor$.

D'une part, nous avons vu au Corollaire 0.5 que

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \vartheta_n \ln n$$

avec $0 \leqslant \vartheta_n \leqslant 1$.

D'autre part, en développant canoniquement $n!$ en produit de facteurs premiers, soit

$$\ln n! = \sum_{p \leqslant n} v_p(n!) \ln p,$$

on déduit du Corollaire 1.7 que

$$\ln n! < n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

et

$$\ln n! > n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant n} \ln p.$$

D'après le Théorème 1.4, la dernière somme en p ne dépasse pas $n \ln 4$. On a donc

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} - n \ln 4 < n \ln n - n + (1 + \ln n) < n \ln n$$

d'où

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} \leqslant \ln n + \ln 4 < \ln x + \ln 4.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} &< \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \\ &\leqslant \sum_{r \geqslant 1} \sum_{2^{r-1} < m \leqslant 2^r} \frac{r \ln 2}{m(m-1)} = \sum_{r \geqslant 1} \frac{r \ln 2}{2^r} = \ln 4, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + n \ln 4 > n \ln n - n + 1$$

et finalement

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} > \ln n + \frac{1}{n} - (1 + \ln 4) \geqslant \ln x - (1 + \ln 4).$$

Cela achève la démonstration. □

1.5. Deux nouvelles formules asymptotiques

Le premier théorème de Mertens est conceptuellement différent des estimations de Tchébychev. Il fournit un équivalent d'une somme pondérée portant sur les nombres premiers. Il est en quelque sorte le prototype d'une classe de résultats dont le point culminant est le théorème des nombres premiers — correspondant au cas où le coefficient de pondération est la constante 1.

Nous allons voir que le Théorème 1.8 contient d'autres résultats de même nature. En particulier, il permet d'évaluer les expressions

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Commençons par mettre en évidence un lien étroit entre ces deux quantités.

Théorème 1.9. *Posons* $c_0 := \sum_p \Big\{\ln\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)-\frac{1}{p}\Big\} \approx 0{,}315\,718$. *Alors on a, pour* $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \ln\Big\{1\Big/\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big\} - c_0 + \frac{\vartheta}{2(x-1)}$$

où $\vartheta = \vartheta(x) \in]0,1[$.

Démonstration. En utilisant l'expression de c_0, on obtient la formule annoncée avec

$$0 < \vartheta(x) = 2(x-1)\sum_{p>x}\Big\{\ln\Big(\frac{1}{1-1/p}\Big)-\frac{1}{p}\Big\}$$

$$= 2(x-1)\sum_{p>x}\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}p^{-k} < \sum_{p>x}\frac{2(x-1)}{2p(p-1)} < \sum_{n>x}\frac{(x-1)}{n(n-1)} = \frac{x-1}{N-1}$$

où N est le plus petit entier $> x$. Cela établit l'estimation requise. □

Théorème 1.10. *Il existe une constante* c_1 *telle que l'on ait pour* $x \geqslant 2$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \ln_2 x + c_1 + O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big).$$

De plus, la constante impliquée par le symbole de Landau peut être choisie $\leqslant 2(1+\ln 4) < 5$.

Remarque. Le Théorème 1.12 ci-après permet d'obtenir facilement une approximation numérique de c_1. On a $c_1 = \gamma - c_0 \approx 0{,}261497$.

Démonstration. D'après le premier théorème de Mertens, on a pour $t \geqslant 2$

$$R(t) := \sum_{p\leqslant t}\frac{\ln p}{p} - \ln t = O(1).$$

Or, on a

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\int_{2-}^{x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}\Big\{\sum_{p\leqslant t}\frac{\ln p}{p}\Big\}=\int_{2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}+\int_{2-}^{x}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\ln t}$$
$$=\ln_2 x-\ln_2 2+\frac{R(x)}{\ln x}-\frac{R(2-)}{\ln 2}+\int_{2}^{x}\frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

où nous avons traité l'intégrale impliquant $R(t)$ par sommation d'Abel.

Soit $R:=\sup_{t\geqslant 2-}|R(t)|$. On a

$$\left|\frac{R(x)}{\ln x}-\int_{x}^{\infty}\frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2R}{\ln x}<\frac{2(1+\ln 4)}{\ln x}$$

grâce à la majoration du Théorème 1.8. On en déduit la formule annoncée avec

$$c_1=-\ln_2 2+1+\int_{2}^{\infty}\frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

□

Théorème 1.11. *Les constantes c_0 et c_1 ayant les valeurs introduites aux Théorèmes 1.9 et 1.10, on a pour $x\geqslant 2$*

$$\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{\mathrm{e}^{-(c_0+c_1)}}{\ln x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}.$$

C'est un corollaire immédiat des Théorèmes 1.9 et 1.10.

1.6. La formule de Mertens

Le second théorème de Mertens, célèbre sous le nom de « formule de Mertens » permet d'expliciter la constante apparaissant au Théorème 1.11.

Théorème 1.12 (Formule de Mertens). *Avec les notations du § 1.5, on a $c_0+c_1=\gamma$, où γ désigne la constante d'Euler. Ainsi*

$$\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}\qquad(x\geqslant 2).$$

Démonstration. Posons, pour $\sigma>1$,

$$\zeta(\sigma):=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

En comparant la somme à une intégrale, on voit facilement que

$$\zeta(1+\sigma)=\frac{1}{\sigma}+O(1)\qquad(\sigma>0).$$

De plus, on a

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{1+\sigma}}\leqslant\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p^{1+\sigma}}\Big)^{-1}\leqslant\zeta(1+\sigma)$$

car le produit sur p est égal à la somme $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n/n^{1+\sigma}$ où ε_n vaut 1 si tous les facteurs premiers de n sont $\leqslant x$ et vaut 0 sinon. En faisant tendre x vers l'infini, on obtient la célèbre formule d'Euler

$$\zeta(1+\sigma) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^{1+\sigma}}\Big)^{-1}.$$

Maintenant, considérons la fonction

$$f(\sigma) = \ln\zeta(1+\sigma) - \sum_p \frac{1}{p^{1+\sigma}} = \sum_p \Big\{ \ln\Big(\frac{1}{1-p^{-1-\sigma}}\Big) - \frac{1}{p^{1+\sigma}} \Big\}.$$

Comme le terme général est positif et majoré par $1/p(p-1)$, la série $f(\sigma)$ est uniformément convergente pour $\sigma \geqslant 0$; en particulier, sa somme est continue en 0, soit

$$\lim_{\sigma\to 0} f(\sigma) = f(0) = c_0.$$

Nous allons transformer les deux termes de la somme $f(\sigma)$. D'une part,

$$\ln\zeta(1+\sigma) = \ln\big\{1/\sigma + O(1)\big\} = \ln\big(1/\sigma\big) + O(\sigma) = \ln\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sigma}}\Big) + O(\sigma)$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\sigma n} n^{-1} + O(\sigma) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}H(t) + O(\sigma)$$

où nous avons posé

$$H(t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant t} \frac{1}{n}.$$

Une intégration par parties dans l'intégrale de Stieltjes implique donc

$$\ln\zeta(1+\sigma) = \sigma \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t} H(t)\,\mathrm{d}t + O(\sigma).$$

D'autre part, notant $P(u) := \sum_{p\leqslant u} 1/p$, on peut écrire

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\sigma}} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}P(u)}{u^\sigma} = \sigma \int_1^\infty \frac{P(u)}{u^{1+\sigma}}\,\mathrm{d}u = \sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t} P(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient donc ainsi

$$f(\sigma) = \sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\big(H(t) - P(\mathrm{e}^t)\big)\,\mathrm{d}t + O(\sigma).$$

Or, nous avons vu au Théorème 0.8 que l'on a

$$H(t) = \ln t + \gamma + O(1/t) \qquad (t \geqslant 1),$$

et il découle du Théorème 1.10 que

$$P(\mathrm{e}^t) = \ln t + c_1 + O(1/t) \qquad (t \geqslant 1).$$

Il suit, pour $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sigma \int_0^\infty \Big\{\gamma - c_1 + O\Big(\frac{1}{t+1}\Big)\Big\} \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t + O(\sigma) \\ &= \gamma - c_1 + O\Big(\sigma + \sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\Big) = \gamma - c_1 + O\big(\sigma \ln(1/\sigma)\big) \end{aligned}$$

et finalement $c_0 = f(0) = \gamma - c_1$, ce qui achève la démonstration. □

1.7. Un autre théorème de Tchébychev

Tchébychev a montré que si l'on a $\pi(x) \sim cx/\ln x$, alors la constante c est nécessairement égale à 1.

Théorème 1.13. *On a*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant 1 \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}.$$

Démonstration. Les deux inégalités se traitant de manière analogue, bornons nous à établir celle de gauche. Soit

$$\ell := \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $x_0 = x_0(\varepsilon) \geqslant 2$ tel que l'on ait

$$\pi(t) \geqslant (\ell - \varepsilon)\frac{t}{\ln t}, \qquad (t \geqslant x_0(\varepsilon)).$$

Cela implique pour $x > x_0$

$$\begin{aligned} \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} &\geqslant \int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t} = \frac{\pi(x)}{x} - \frac{\pi(x_0)}{x_0} + \int_{x_0}^x \pi(t)t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant -1 + (\ell - \varepsilon)\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \geqslant (\ell - \varepsilon)\ln_2 x + O_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.10, il s'ensuit que $\ell - \varepsilon \leqslant 1$ et donc $\ell \leqslant 1$ puisque ε peut être choisi arbitrairement petit. □